ÉNONCÉ

G gr simple de card $= 60$. Alors $G \simeq \mathcal{A}_5$.

LEÇONS.

101

103

104 :

105

121

RÉFS.

[Sépioglas] Algèbre L3 p. 277

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. $\mathcal{A}_n$ est l'unique $\leq$ d'indice 2 de S_n.
2. théorèmes de Sylow.
3. • Si G de cardinal p ou p^2, G abélien.
   • Si G p-groupe $Z(G) \neq 1$
4. G simple + abélien $\Leftrightarrow$ $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p 1er

DÉMO

// : à l'oral. // : pour comprendre.
// écrit au tableau. // : structure

Soit G gr simple, $|G| = 60$.

LEMME : $\mathcal{A}_5$ est le seul sous groupe d'indice 2 de S_5.
On se ramène donc à vouloir relier G à S_5.
Un moyen de construct 1 isom avec gn peamut est de faire agir G fidèlement sur un ensemble bien choisi de cardinal 5.

Le tout est de prouver l'existence d'un tel ensemble.

1. Mq on a si $\exists H \underset{\text{strict}}{<} G$, $[G:H] \leq 5$
2. Mq il existe un tel H.

1. sq $\exists H < G$, $[G:H] \leq 5$

CAS 1 : $[G:H] = 5$

On fait agir G sur G/H par translation à gauche (transitive).
On a donc un morphisme $\phi : G \to S(G/H) \simeq S_5$.
on veut qq chose d'injectif : on regarde le noyau.
$\ker(\phi) \triangleleft G$ $\quad \underbrace{\phi \text{ non trivial}}_{H \neq G}$ donc $\ker(\phi) = \{1\}$ (G simple)

G est simple, soit $= \{1\}$, soit $= G$

$\ker(\phi) = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$. si $\ker(\phi) = G$: $\bigcap_{a \in G} aHa^{-1} = G \subset H$: donc $G = H$: Non.

Donc $G \simeq \phi(G)$ et $|\phi(G)| = |G| = 60 = \frac{120}{2}$.
$[S_5 : \phi(G)] = 2$ donc $\phi(G) \simeq \mathcal{A}_5$ par lemme rappelé au début.

CAS 2 : $[G:H] \leq 4$

On a, de la même manière $G \xrightarrow{\text{action fidèle}} S_4$.
Or, $|G| = 60 > 24 = |S_4|$: CONTRADICTION. (avec injectivité)

indice ≥ 2.

2. Par l'absurde, supposons qu'il n'existe pas de sous groupe strict de G d'indice ≤ 5. $(*)$

On sait qu'il existe des ss gr. par les th. Sylow. On va étudier leurs indices.

On va procéder en plusieurs étapes.

PLAN :

① étude des p-sylows de G

② dénombrement dans G

↳ obt contradiction sur le cardinal.

① $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Par les théorèmes de Sylow, G admet n_2 2-sylows et n_5 5-sylows avec :

G agit transitivement sur ses p-Sylow par conjug.

$n_p = [G : \mathrm{Stab}(S_p)]$ avec S_p un p-sylow. $p \in \{2,5\}$

↳ $n_p = |X| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}(S_p)|} = [G : \mathrm{Stab}(S_p)]$.

$\begin{cases} n_2 \mid 15 \\ n_2 \equiv 1 \ [2] \end{cases}$ donc $n_2 \in \{1, \overbrace{\cancel{3}, \cancel{5}}^{\text{par } (*)}, 15\}$.

$\begin{cases} n_5 \mid 12 \\ n_5 \equiv 1 \ [5] \end{cases}$ donc $n_5 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 6, 12\}$

• Comme G est simple, $n_2 \neq 1$ et $n_5 \neq 1$, donc $n_5 = 6$ et $n_2 = 15$.

(car sinon l'unique p-sylow est distingué) $1 = |G \cdot S_2|$ donc $\forall g \in G$, $gS_2g^{-1} = g$ et $S_2 \lhd G$

<u>intersections</u> :

• si S_5, S_5' 5-sylow $S_5 \cap S_5' = \{1\}$ par le th de Lagrange.

$S_1 \cap S_2' \subsetneq S_1'$ et $|S_1| = 5$ donc card $\mid 1$.

Pr les 2-sylow : pas direct Lagrange car de card $= 4$ non 1er.

• Mq si $S_2 \neq S_2'$ 2-sylow de G, $S_2 \cap S_2' = \{1\}$

• Soit S_2, S_2' 2 sylows de G.

car simple + abé => $\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

. G est simple, non abélien donc $Z(G) = \{1\}$ (car $Z(G) \lhd G$ et $\neq G$)

car card $\neq 1^{\text{er}}$.

. Soit $g \in S_2 \cap S_2'$.

<u>BUT</u> : mq $g \in Z(G)$ ie $G = \{h \in G, hgh^{-1} = g\} := C(g)$.

le centralisateur de g = Stab pr action par conjugaison.

On regarde le cardinal

S_2 et S_2' sont abéliens (d'ordre p^2 avec $p=2$).

Donc $S_2 \cup S_2' \subset C(g) \subset G$.

Lagrange : $S_2 \subset C(g)$.

$S_2 \neq S_2'$ donc $|S_2 \cup S_2'| > 4 = |S_2|$

Par le th. de Lagrange : $\begin{cases} 4 \mid |C(g)| \\ |C(g)| > 4. \\ |C(g)| \mid 60. \end{cases}$

Donc $|C(g)| \in \{12, 20, 60\}$.

Par $(*)$, $|C(g)| = 60$ et $C(g) = G$ donc $g \in Z(G) = \{1\}$.

en termes d'indices... $\frac{60}{12} = 5 \leq 5$; $\frac{60}{20} = 3 \leq 5$.

② On compte le nb d'élems d'ordre 2 ou 4.

dans S_1 : $|S_1| = 4$. $\forall$ les élems de $S_1 \neq 1$ sont d'ordre 2 ou 4. Il y en a $4-1=3$.

- nombre d'éléments d'ordre 2 ou 4 : $\underbrace{15}_{\text{nb de 2 sylow}} \times (\underbrace{4-1}_{\text{nb d'élem} \neq 1 \text{ ds chaques 2 sylow}}) = 45$.

- nombre d'éléments d'ordre 5 : $6 \times (5-1) = 24$

Or, $24 + 45 = 69 > 60$: CONTRADICTION.

$\boxed{\text{Donc } \exists H < G \text{ d'indice } \leq 5}$